20 mg per pillola

X = quantità di principio attivo presente in una generica pillola $\sim N(\mu, \sigma^2)$

25 pillole

$\bar{x} = 19.7$ mg

$(X_1, \ldots, X_{25})$ campione di legge $N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} \longrightarrow \bar{x}$

$$\sum_{i=1}^{25} \underbrace{(x_i - \bar{x})^2}_{\text{scarto quadratico}} = 40.5 \ (\text{mg})^2$$

(a) Calcolare una stima per la varianza di X

(b) $H_0 : \mu = \mu_0 = 20$ $\qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$

Al livello $\alpha = 0.05$ cosa si può dire?

(a) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}$ varianza campionaria

$n = 25$ $\quad S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \dfrac{40.5}{24} = 1.69 = s^2$

$H_0 : \mu = 20$ $\quad T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$

$$t_{\alpha}() = -t_{1-\alpha}()$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{19.7 - 20}{\sqrt{1.69}}\sqrt{25} = \underline{\underline{-1.15}}$$

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{n-1}$$

$$\left\{ |T| \overset{1.15}{>} \overset{2.0639}{\underline{t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \right\}$$

$\alpha = 0.05$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$

$t_{0.975}(24) = 2.0639$

(c) Con una varianza reale $\sigma^2 = 1.56$

e $\bar{x} = 19.7$ n pillole

Qual è il minimo valore di

n che consente di respingere H_0 ?

$\alpha = 0.05$

$$\left\{ |T| > \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \qquad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{19.7 - 20}{\sqrt{1.56}} \sqrt{n}$$

$$t = -0.24\sqrt{n}$$

$$\left\{ |T| > \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = \{|T| > 1.96\}$$

$$|t| = 0.24\sqrt{n} > 1.96$$

$$\sqrt{n} > \frac{1.96}{0.24} = 8.16$$

$$n > 66.59 \qquad n \geq 67$$

20 % = media nazionale di evasori

1000 contribuenti

tasso di evasione = 21 %

$\alpha = 0.05$

H_0: la percentuale di evasione nella città Y è superiore a quella nazionale

n osservazioni $X_1 - - - X_n$ indip.

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases} \sim B(1,p)$$

$$H_0 : \quad p \geq p_0$$

$$H_1 : \quad p < p_0$$

$$\boxed{H_0 : p = p_0}$$

$$\boxed{H_0 : p \geq p_0}$$

$$\boxed{H_0 : p \leq p_0}$$

$$T = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}$$

Test

$H_0 : p = p_0$

$H_0 : p \geq p_0$

$H_0 : p \leq p_0$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$T = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}$$

RC

$\{ |T| > \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}} \}$

$\{ T < \varphi_{\alpha} \}$

$\{ T > \varphi_{1-\alpha} \}$

$p_0 = 0.2$

$n = 1000$

$\bar{x} = 0.21$

$$t = \frac{0.21 - 0.20}{\sqrt{0.20 \times 0.80}} \sqrt{1000} = \underline{\underline{0.79}}$$

$$\{T < \varphi_\alpha\} = \{T < \varphi_{0.05}\} =$$

$$= \{T < -\varphi_{1-0.05}\} = \{T < -\varphi_{0.95}\}$$

$\varphi > \varphi_0$

$$= \{T < -1.65\}$$

$\Longrightarrow H_0$ non è respinta

(b) $H_0 : p \leq p_0$ $\qquad\qquad$ $p \leq p_0$

$$t = 0.79$$

$$\{T > \varphi_{1-\alpha}\} = \{T > \varphi_{0.95}\} =$$
$$= \{T > 1.65\}$$

α

$p \geq p_0$

(c) n dichiarazioni $\qquad$ Con entrambi i test

Test | R.C.

$H_0: p \geq p_0$ | $\{T < \varphi_\alpha\}$ | $\alpha = 0.05$

$H_0: p \leq p_0$ | $\{T > \varphi_{1-\alpha}\}$

$T > \varphi_\alpha = -1.65$

$$t = \underbrace{\frac{0.21 - 0.20}{\sqrt{0.20 \times 0.80}}}_{0.025} \sqrt{n}$$

$T > \varphi_{1-\alpha} = 1.65$

$$\begin{cases} 0.025\sqrt{n} > -1.65 \leftarrow \\ 0.025\sqrt{n} > 1.65 \leftarrow \end{cases}$$

$\sqrt{n} > 66$

$n > 4356$

$p = \frac{1}{6}$ almeno 100 contratti in un mese

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo individ. accetta la proposta} \\ 0 & \text{se no} \end{cases}$$

(a) Esprimere con le X_i il n° di contratti ottenuti con n telefonate

(b) Calc. la prob. che 625 telefonate in un mese non siano sufficienti per avere il premio di prod.

(c) Calc. il minimo n° di tel. da fare in un mese perché sia ≥ 0.4 la prob. di ottenere

(a) $X_1 + \dots + X_n$ = n° di contratti ottenuti con n telef.

$$P\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{625} X_i}_{} \underset{\le 99}{<} 100\Big) \qquad B\left(625, \tfrac{1}{6}\right)$$

$$= F(\cancel{100}\ 99)$$

$$X_n \sim B(n, \overset{\lambda/n}{\downarrow}p) \sim \underline{\underline{\Pi_{np}}}$$

"n grande"

p "piccolo"

$$\Pi_{\cancel{\ }}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{625} X_i \le \cancel{1000}\ 99\right) \simeq$$

X_i indip id. distr. $\qquad \Phi(\ )$

$\mu = \frac{1}{6} \qquad \sigma^2 = \frac{5}{36}$

$$\simeq P\left(\frac{\sum_{i=1}^{625} X_i - 625\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36}\cdot n}} \le \frac{\overbrace{99 - 625\cdot\frac{1}{6}}}{\sqrt{\frac{5}{36}\cdot n}}\right)$$

$$= \phi(-0.44) = 1 - \phi(0.44) =$$

$$= 1 - 0.67 =$$

$$= 0.33$$

$$\boxed{P(Z \leq \underline{99})}$$

$$Z \sim \Pi_{\frac{625}{6}}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 100\right) \geq 0.4$$

$$= 1 - P\left(\sum X_i \leq 99\right) \geq 0.4$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 99\right) \leq 0.6$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{\overbrace{99 - \frac{n}{6}}^{x}}{\sqrt{n}\sqrt{5/36}}\right) \leq 0.6$$

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) \le \Phi^{-1}(0.6)$$

$$x \le \varphi_{0.6} = 0.26$$

$$\sqrt{n} = y$$

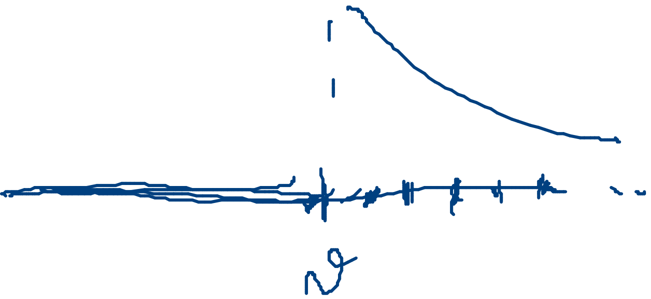
$$\frac{100 - \frac{n}{6}}{\sqrt{n \; 5/36}} \le 0.26$$

$$n \ge 586,12$$

$$y \ge 24.21$$

$$y \le -24.78$$

$$y^2 + 0.58y - 600 \ge 0$$



$$f^{\vartheta}(x) = \begin{cases} \dfrac{k(\vartheta)}{x^2} & x > \vartheta \\ 0 & x \le \vartheta \end{cases} \qquad \vartheta > 0$$

(a) Calc. $k(\vartheta)$ affinché f^{ϑ} sia una densità

f^{ϑ}

(i) integrabile su $\mathbb{R}$

(ii) $f^{\vartheta} \ge 0$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\vartheta}(x)\,dx = 1$

$T > c$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\vartheta}(x)\,dx = 1$$

$\vartheta \le \vartheta_0$

$$\int_{\vartheta}^{+\infty} \frac{k(\vartheta)}{x^2}\, dx = 1$$

$$k(\vartheta) \left[-\frac{1}{x} \right]_{\vartheta}^{+\infty} = \frac{k(\vartheta)}{\vartheta} = 1$$

$$\Longrightarrow k(\vartheta) = \vartheta$$

(b) Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione con densità f^{ϑ}

$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$

$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ valore noto

$$T = \min(X_1, \dots, X_n)$$

Regione critica $\{T > c\}$

Calc. c in modo che il test abbia livello α assegnato

$$\alpha^* = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} P^\vartheta(T \in D) \le \alpha$$

$$\sup_{\vartheta \le \vartheta_0} P^\vartheta(T > c) \le \alpha$$

$$\sup_{\vartheta \le \vartheta_0} P^{\vartheta}(T > c) \qquad c > \vartheta$$

$$P(T \le \cancel{x}) = 1 - P(T > x)$$

$$\underline{P(T > c)} = P(\min(X_1, \ldots, X_n) > c) =$$

$$= P(X_1 > c, X_2 > c, \ldots, X_n > c) =$$

$$= P(X_1 > c) \cdot P(X_2 > c) \cdot \ldots \cdot P(X_n > c)$$

$$= \left[\int_c^{+\infty} f^{\vartheta}(x)\,dx\right]^n = \left(\int_c^{+\infty} \frac{\vartheta}{x^2}\,dx\right)^n =$$

$$= \left(\left[-\frac{\vartheta}{x} \right]_c^{+\infty} \right)^n = \left(\frac{\vartheta}{c} \right)^n = \frac{\vartheta^n}{c^n}$$

$$\sup_{\vartheta \leq \vartheta_0} \frac{\vartheta^n}{c^n} \leq \alpha \qquad \left\{ T > \frac{\vartheta_0}{\sqrt[n]{\alpha}} \right\}$$

$$\frac{\vartheta_0^n}{c^n} \leq \alpha \longrightarrow \frac{\vartheta_0}{c} \leq \sqrt[n]{\alpha}$$

$$c = \frac{\vartheta_0}{\sqrt[n]{\alpha}} \qquad c \geq \frac{\vartheta_0}{\sqrt[n]{\alpha}}$$